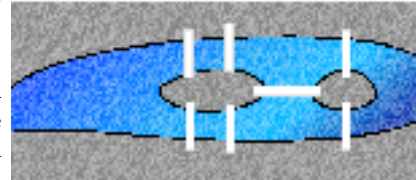


PER SABER DE QUÈ PARLAM**Els ponts de Königsberg**

La ciutat de Königsberg estava distribuïda entre les dues ribes del riu Pregel i les dues illes rodejades pel riu. L'any 1759 es van construir set ponts per tal d'unir la ciutat.

Un ciutadà de Königsberg, del que no tenim més dades, es va proposar un passeig que passés per cada un dels ponts una sola vegada. No va passar molt de temps i tota la població de Königsberg es dedicava a recórrer els ponts per veure si ho aconseguia. Podries ajudar-los?

**El magatzem**

En un magatzem pots aconseguir un descompte del 20%, però, al mateix temps, has de pagar un impost del 16%. Què preferiries que calculassin primer, el descompte o l'impost?

Persones amb el mateix nombre de cabells

Hi ha en el món dues persones amb el mateix nombre de cabells al cap?

Quadrats en el tauler d'escacs

Algú va dir una vegada que el tauler d'escacs tenia 204 quadrats. Pots explicar aquesta afirmació?

Les edats de les meves filles

Dos amics matemàtics parlen sobre les seves respectives famílies. Un diu: "El producte de les edats de les meves tres filles és 36, i la suma el número de la casa on tu vius, em sabries dir les seves edats?". L'amic, pensa una estona i respon: "Em falta una dada". L'altre contesta: "Tens tota la raó, la gran toca el piano". Sabries dir quines són les edats de les tres filles?

PER RESOLDRE UN PROBLEMA ÉS NECESSARI (G. Polya):**I. COMPENDRE EL PROBLEMA**

- Quina és la incògnita? Quines són les dades?
- Quines són les condicions? Són suficients per determinar la incògnita? Són insuficients ? Són redundants ? Són contradictòries ?
- Fes un dibuix. Simbolitza el problema de forma adient.

II. CONCEPCIÓ D'UN PLA

- T'has trobat amb un problema semblant o plantejat d'una manera més o menys igual?
- Coneixes un problema que pugui estar relacionat amb aquest ? Coneixes algun teorema que et pugui ser útil? Mira la incògnita i intenta recordar un problema que et sigui familiar i tingui la mateixa incògnita o una de semblant.
- Aquí tens un problema relacionat amb el teu i ja resolt. Pots utilitzar-lo? Pots utilitzar el seu resultat? Podries utilitzar el mateix mètode? Hauries d'introduir algun altre element que et permetés utilitzar aquest mètode?
- Pots enunciar el problema d'una altra forma? Pots plantejar-lo de nou d'una manera diferent?
- Si no pots resoldre el problema proposat, intenta resoldre primer algun problema semblant. Pots imaginar un problema anàleg que te sigui més fàcil? Un problema més general? Un cas particular? Un problema anàleg? Pots resoldre una part del problema? Considera una part de les condicions, descarta la resta, la incògnita, ara, és més fàcil de determinar?, com pot variar? Pots deduir de les dades algun element d'utilitat? Pots pensar en algunes altres dades que et permetin determinar la incògnita? Pots canviar la incògnita? Pots canviar la incògnita o les dades, o tots dos si és precís, de manera que la nova incògnita i les noves dades siguin més fàcils de relacionar? .
- Has utilitzat totes les dades? Has utilitzat totes les condicions? Has tingut en compte tots el coneixements que fan referència al problema?

III. EXECUCIÓ DEL PLA

- Mentre portes a terme el pla per trobar la solució, comprova cada un dels passos.
- Pots veure que el pas és correcte. Pots demostrar-lo?

IV. VISIÓ RETROSPECTIVA

- Pots verificar la solució obtinguda? Pots verificar el raonament utilitzat?
- Pots obtenir el resultat de diferent forma? - Pots veure'l d'un cop d'ull? Pots utilitzar el resultat o el mètode en algun altre problema?

* L'esquema està extret de *Cómo plantear y resolver problemas* de G. Polya. Ed Trillas. A les pàgines següents l'autor desenvolupa i exemplifica l'esquema proposat.

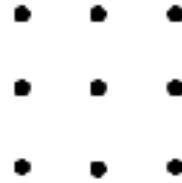
* Un altre esquema es pot trobar *Pensar matemàticament* de John Mason, Leone Burton i Kaye Satcey. Ed. Labor.

* Vos recoman molt especialment la lectura de *PARA PENSARMEJOR* de Miguel de Guzmán. Ed. Labor. (Les fotocòpies que vos he passat són d'aquest llibre).

PROBLEMES**I. SUPOSICIONS AMAGADES**

1. Nou punts

Hem d'unir 9 punts, distribuïts en un quadrat 3x3, per mitjà de 4 segments rectilinis consecutius, sense aixecar el llapis del paper ni passar dues vegades pel mateix camí.



2.- El color de l'os?

Un caçador surt de casa seva i fa 1 Km cap el Sud, es troba amb un immens os i atabalat al disparar no el mata sinó que tot just el malfereix, pel que arrenca a córrer i fa 1 Km. cap el Est. En aquest punt s'adona de que l'os ja no el segueix i decideix tomar pel que fa 1 Km. cap al Nord i entra a casa seva. De quin color és l'os?

3.- Vertader o fals

Per cada una de les afirmacions numerades de la següent llista, determina si és vertadera o falsa

1. L'afirmació 2 d'aquesta llista és vertadera
2. L'afirmació 1 d'aquesta llista és falsa
3. L'afirmació 3 d'aquesta llista és falsa
4. Hi ha dos errors en l'afirmació 4 d'aquesta llista

II. CLASSIFICAR, ORGANITZAR

1.- Un home va comprar cinc barrils de vi i un de cervesa. En el dibuix, cada barril té marcat el seu contingut en litres. Va vendre una quantitat de vi a un client i el doble d'aquesta quantitat a un altre, i ja sense que li quedàs més vi, es va guardar el barril de cervesa. El problema és descobrir quin és el barril de cervesa. Per suposat, que l'home no va modificar els continguts dels barrils.



2.- Rectangles en el tauler d'escacs

Quants rectangles hi ha en un tauler d'escacs?

3.- Bitxos

Na Rosa col·lecciona dragons, escarabats i cucs. Té més cucs que dragons i escarabats junts. En total, té en la col·lecció dotze caps i vintisis pates. Quants dragons té na Rosa?

4.- Zeros de 10000!

Amb quants zeros acaba 10000!?

6.- Comensals d'una boda

En una boda 12 persones han de seure al voltant d'una taula rodona on a cada plat hi ha indicat el nom d'una de les 12 persones. Al seure resulta que no hi ha ningú que sigui al seu lloc. Demuestra que podem girar la taula de forma que com a mínim hi hagi dues persones al seu lloc.

7.- Segadors

Un grup de segadors ha de segar dos camps un de doble àrea que l'altre. Pel matí tots treballen en el gran i per la tarda una meitat en el gran i l'altra en el petit. Acabada la jornada queda únicament feina en el camp petit per un segador una jornada completa. Quants segadors hi ha?

8.- On es trobaran?

Un jove i un vell viuen al mateix edifici i treballen al mateix lloc. El jove tarda 20 minuts en fer el trajecte a la feina i el vell 30. Si avui el vell ha sortit 5 minuts abans en quin punt del trajecte es creuaran? Pots generalitzar el problema sobre els minuts d'avenç del vell?

10.- Genealogia de les abelles

Les abelles mascle neixen d'ous sense fecundar, i per tant tenen mare, per no pare. Les abelles femella neixen d'ous fecundats. ¿Quants avantpassats tindrà una abella mascle en la duodèsima generació?. Quants d'ells seran mascles?.

11.- Com pot ser?



- Pensar que despús-ahir tenia 22 anys i l'any que ve en tindrè 25
- Com pot ser?.



12.- La moneda falsa

Tenc 8 monedes. Totes iguals d'aspecte. Una, però, és falsa i pesa manco que les altres. És possible determinar quina és fent només dues pesades amb una balança de dos plats?

III CONJECTURAR

1.- Mobles

Hem de moure una butaca molt pesada, i l'únic moviment possible és fer-lo girar 90° sobre una de les seves pates. ¿Serà possible moure-la de manera que quedi exactament darrera d'on era abans, i mirant en la mateixa direcció?

2.- L'hotel extraordinari

Un hotel disposa de 5000 habitacions i de 5000 cambrers. Els cambrers tenen el següent costum, més aviat ximple: un primer cambrer obre totes les portes de les habitacions, un segon cambrer tanca totes les portes de les habitacions parells, un tercer cambrer canvia de posició totes les portes múltiples de 3, un quart cambrer canvia de posició totes les portes múltiples de 4, un cinquè cambrer canvia de posició totes les portes múltiples de 5, ... Així fins que ha passat l'últim cambrer. Es demana quines portes quedaran obertes al final.

3.- Diferència de quadrats

¿Quins nombres poden expressar-se com a diferència de dos quadrats perfectes?

4.- Sumes consecutives

Alguns nombres es poden expressar com a suma d'una successió de nombres positius consecutius. Exactament, quins nombres tenen aquesta propietat? Per exemple, observa que:

$$\begin{aligned} 9 &= 2+3+4 \\ 11 &= 5+6 \\ 18 &= 3+4+5+6 \end{aligned}$$

5.- Dissecció del quadrat

Es diu que un nombre N és *agradable* si un quadrat es pot dissecionar en N quadrats que no es solapin. Quins són els nombres *agradables*?

IV. IDEES CLAU

1.- Trajectòria guanyadora

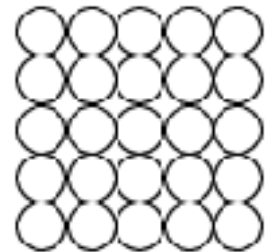
En el pati d'una escola hi ha dos arbres i una paret. Els nens realitzen el següent joc, surten d'un dels arbres per anar a tocar la paret i després a l'altre arbre en el mínim temps possible. Quina seria la trajectòria guanyadora?

SIMPLIFICAR EL PROBLEMA

1.- La mosca capritxosa

Sobre la taula has col·locat 25 monedes d'un euro d'aquesta forma:

Ve una mosca volant i es posa sobre una de les monedes. Se li acudeix que li agradaria passejar-se per totes les monedes caminant, passant d'una moneda a una altra que la toqui i sense repetir monedes. Podrà fer-ho?. Podries mostrar-li l'itinerari?.



V. RECORDAR PROBLEMES CONEGUTS

1.- Quinze

Es col·loquen nou fitxes en una taula, numerades de l'1 al 9. Dos jugadors van agafant alternativament una fitxa de la taula. El guanyador és el primer que aconseguixi tres fitxes que sumin exactament 15.

2.- Un venedor té davant seu sis caixes amb ous. Cada una té ous d'una classe, de gallina o de ànec. Cada caixa té el nombre d'ous que s'indica.

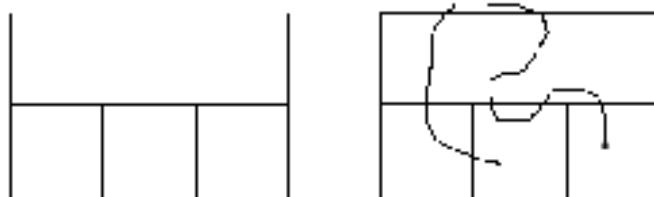
El venedor diu, senyalant una caixa que no podem veure quina és: "Si venc una caixa, em quedarà el doble d'ous de gallina que d'ànec".

Podries ajudar-me a saber de quina caixa està parlant?.



3.- Tallar totes les arestes

¿Sabries passar per totes les arestes de la figura amb una línia contínua i sense que un costat sigui tallat més d'un a vegada?



MES PROBLEMES

1.- Punts mitjos d'un quadrilàter

Donat un quadrilàter qualsevol, es considera el quadrilàter que té per vèrtexs els punts mitjos dels costats del quadrilàter original. Que podries dir dels quadrilàters així obtinguts? Per que?

2.- Divisions del pla

Amb una recta dividim el pla amb dues regions, amb dues rectes podem dividir-lo com a màxim en quatre, amb tres rectes el màxim és set i amb quatre onze. Estudia com depèn el nombre màxim de regions del nombre de rectes.

3.- Espelmes

Tenim dues espelmes de diferent gruix. La més estreta mida 14 cm i es consumeix totalment en 3h i mitja. L'altra tarda 5 h. Si les encenem a la vegada, al cap de dues hores tindrien la mateixa altura. Quina és l'altura de l'espelma més ampla?

4.- Espelmes

S'encenen dues espelmes, alhora, de la mateixa longitud però de diferent gruix. Una es consumeix amb 4 h i l'altra en 5 h. En apagar-les una és quatre vegades més gran que l'altra. Quina estona han estat enceses?

5.- Suma de quadrats

Considera la suma dels n primers quadrats. Que observes? Pots justificar-ho?

6.- Suma de cubs

Considera la suma dels n primers cubs. Que observes? Pots justificar-ho?

7.- Múltiples de 7

Donat un nombre de dues xifres qualsevol (per exemple 25) demostra que el nombre format per tres repeticions seves (en el nostre cas 252525) sempre és divisible per 7.

8.- Fer el doble

És possible trobar un nombre tal que si posem la xifra d'unitats a davant de tot, el nombre sigui ara el doble.

9.- Divisibilitat

Troba un nombre que s'escrigui amb els dígitos de 1'1 al 9 de forma que si considerem els dos primers dígitos sigui múltiple de 2, si considerem els tres primers ho sigui de 3, al considerar els quatre primers de 4,...

10.- Infinits primers

Com demostraries que hi ha infinits nombres primers. Modificant convenientment l'argument es pot demostrar que hi ha infinits nombres primers de la forma $4n-1$.

11. Estacions noves

En cada estació d'una xarxa ferroviària es venen tants bitllets diferents com estacions a les que es pot anar des d'una estació determinada o estacions des de les que es va a ella (el bitllet de A a B

és diferent del de B a A). S'inaugura una nova línia amb varies estacions i això obliga a imprimir 34 nous bitllets diferents. Quantes estacions hi havia i quantes noves se n'han inaugurat?

12. Els trigènims mentiders

Els trigènims Trónchez tenen la molesta costum següent: Cada vegada que se'ls hi fa una pregunta, dos d'ells diuen la veritat i l'altre la mentida sobre la resposta. Els hi vaig demanar quin dels tres havia nascut primer. Em van contestar:

Perico: "En Pepe va néixer primer"

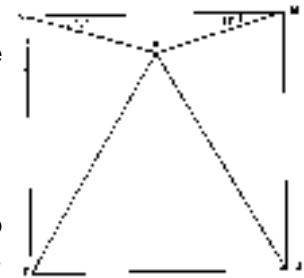
Pepe: "Jo no sóc el major"

Pau: "En Perico va néixer el primer"

Quin dels tres va néixer primer?

13. Triangle equilàter

En un quadrat MNPQ es traça el punt A com indica la figura. El triangle APQ té tota la pinta de ser equilàter. Ho és?



14.- Girant gots

Sobre una taula hi ha gots de paper, uns cap amunt i els altres girats. Invertint dos gots al mateix temps ¿podré aconseguir posar-los tots cap amunt?. Quin és el millor procediment?. I si supòs que hi ha tres o més gots i em permeto girar-ne tres a la vegada?.

15.- Edats de la família

En el casament de la seva filla petita, el Sr. M està molt content doncs s'adona que tan la seva edat com la de la seva dona i com de la filla que es casa totes tenen 8 divisors. Sabries dir quines edats tenen, si la Sra. M és més gran que el seu marit i es van conèixer quan tots dos estudiaven al institut?

16.- La bereneta

Cinc senyores berenen assegudes entorn d'una taula rodona. La senyora García està asseguda entre la senyora López i la senyora de Martínez. Elena està asseguda entre na Catalina i la senyora de Pérez. La senyora de López està entre Elena i Alícia. Catalina i Doris són germanes. Isabel està asseguda amb la senyora de Gómez a la seva esquerra i la senyora de Martínez a la seva dreta.

Col·loca els noms amb els seus corresponents llinatges.

17.- El senyor barbut

Diu mirant la fotografia d'un senyor barbut: "Ni germans ni germanes tenc, però el pare d'aquest home és el fill del meu pare". De qui és la fotografia?